JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 14, 38–42 (1975)

# Sur les Systèmes de Tchebycheff

J. MANDLER

*Université de Paris VI, 75005 Paris, France*

*Communicated by G. G. Lorentz*

## 1

Le présent travail ne fait guère appel qu'aux propriétés les plus immédiates des systèmes de Tchebycheff (réels), non à leur théorie proprement dite; les unes et l'autre se trouvent par exemple dans [1, Chapitre 2].

## 2

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on cherche à identifier les espaces compacts $K$ ayant la propriété suivante:

($P_n$) *Tout système de Tchebycheff sur $K$, formé de $n$ fonctions, admet un polynome partout* $> 0$

**2.1.** Le théorème de Mairhuber (énoncé dans [1, p. 34]; démontré par exemple dans [2]) montre qu'on ne perd rien d'essentiel en se restreignant aux sous-espaces compacts du tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Voici alors le résultat:

THÉORÈME 2.2. *Un compact de $\mathbb{T}$ vérifie ($P_n$) si, et seulement si, le nombre de ses composantes connexes n'excède pas $n$.*

**2.3.** En particulier, le segment $[0, 1]$ et le tore lui-même satisfont à ($P_n$) pour tout $n$. Ceci était déjà connu [1, p. 35, Problème 11] comme conséquence évidente de la théorie de Tchebycheff. Nous reviendrons sur ces cas simples en 3.3 ci-dessous.

## 3

Le reste de cet article est consacré à la preuve du Théorème 2.2.

Il sera commode de remplacer provisoirement ($P_n$) par une propriété en apparence plus faible:

($Q_n$) *Tout système de Tchebycheff sur K, formé de n fonctions, admet un polynome non identiquement nul, partout* $\geqslant 0$

PROPOSITION 3.1. *Si l'espace compact $K$ est réunion d'une suite croissante ($T_p$) de sous-espaces compacts vérifiant ($Q_n$), alors $K$ lui-même vérifie ($Q_n$).*

En effet, soient $S$ un système de Tchebycheff sur $K$ formé de $n$ fonctions, $E$ l'espace vectoriel de ses polynomes. Comme les restrictions des fonctions de $S$ à un compact ayant au moins $n$ points forment un système de Tchebycheff sur ce compact, l'hypothèse entraîne que, pour chaque $p$ suffisamment grand, $E$ contient une fonction non identiquement nulle, $\geqslant 0$ sur $T_p$ ; il suffit dès lors d'appliquer le lemme que voici:

LEMME 3.2. *Soient $K$ un ensemble, $E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}^K$, ($T_p$) un recouvrement de $K$ par une suite croissante de parties. Si, pour chaque $p$, $E\backslash\{0\}$ rencontre le cône $C_p$ des fonctions $\geqslant 0$ sur $T_p$, alors $E\backslash\{0\}$ rencontre le cône $C$ des fonctions $\geqslant 0$ sur $K$.*

Pour prouver ce lemme, munissons $E$ de l'unique topologie séparée compatible avec sa structure vectorielle. Pour tout $x \in K$, l'évaluation en $x$ est une forme linéaire $ev_x$ sur $E$, obligatoirement continue puisque $E$ est de dimension finie; il s'ensuit que les ensembles

$$E \cap C_p = \bigcap_{x \in T_p} ev_x^{-1}([0, +\infty[)$$

constituent dans $E$ une suite décroissante de cônes fermés, non réduits à l'origine par hypothèse. Leur intersection $E \cap C$ ne saurait se réduire à l'origine, car leurs intersections avec l'image de la sphère unité par un isomorphisme de $\mathbb{R}^{\dim E}$ sur $E$ forment une suite décroissante de fermés non vides de ce compact.

**3.3.** Avant de poursuivre, observons qu'il est dès à présent évident que le segment [0, 1] et le tore $\mathbb{T}$ satisfont à la propriété ($Q_n$) pour tout $n$. En effet, pour chaque entier $h$, notons $K_h$ la réunion de [0, 1] et des entiers naturels $\leqslant h$. Puisque $K_h$ est réunion d'une suite croissante de compacts homéomorphes à $K_{h+1}$, l'affirmation concernant [0, 1] sera établie, via la Proposition 3.1, si nous voyons que $K_n = [0, 1] \cup \{2\} \cup \cdots \cup \{n\}$ possède la propriété ($Q_n$); mais ceci est clair, car tout système de Tchebycheff sur $K_n$ formé de $n$ fonctions admet un polynome s'annulant exactement aux points $2, 3, \ldots, n$, donc gardant un signe constant sur $K_n$. Le cas de $\mathbb{T}$ découle aussitôt de celui de [0, 1], le premier étant réunion d'une suite croissante de compacts homéomorphes au second.

## 4

PROPOSITION. *Soient $K$ un compact de la droite réelle ayant $n$ composantes $K_1, \dots, K_n$, et $\{g_1, \dots, g_{n+1}\}$ un système de Tchebycheff sur $K$. Pour tout point $a = (a_1, \dots, a_n)$ du produit $H$ des $K_j$ et tout $a_{n+1} \in K$, posons $F_a(a_{n+1}) = \det(g_j(a_k))_{1 \leqslant j,k \leqslant n+1}$. Alors*

(i) *Pour tout $x \in K$, l'application $H \ni a \to F_a(x) \in \mathbb{R}$ est continue.*

(ii) *Le polynome $F_a$ s'annule exactement aux points $a_j$, $j = 1, \dots, n$.*

(iii) *Tous les nombres de la forme $F_a(\inf K_j) \cdot F_a(\sup K_j)$ sont $\leqslant 0$.*

(iv) *Plus généralement, tous les $F_a(\inf K_j) \cdot F_b(\sup K_j)$ sont $\leqslant 0$.*

(v) *Il existe un élément $a^*$ (resp. $b^*$) de $H$ tel que $F_{a^*}$ (resp. $F_{b^*}$) soit partout $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).*

Les assertions (i) et (ii) sont évidentes; (iii) se prouve par le raisonnement de [1, p. 25–26].

Pour $j \in [1, n]$ et $a \in H$, l'ensemble $E_a{}^j$ des $b \in H$ vérifiant les deux inégalités $F_a(\inf K_j) \cdot F_b(\sup K_j) \leqslant 0$ et $F_a(\inf K_j) \cdot F_b(\inf K_j) \geqslant 0$, contient $a$ d'après (iii); on constate sans peine, à l'aide des assertions (i) à (iii), qu'il est à la fois fermé et ouvert dans le connexe $H$. Ainsi $E_a{}^j = H$ pour tous $j$ et $a$, ce qui établit (iv).

Soit $t$ l'élément $(\inf K_1, \dots, \inf K_n)$ de $H$. Les ensembles $J_- = \{j \in [1, n] : F_t(K_j) \subset ]-\infty, 0]\}$ et $J_+ = \{j \in [1, n] : F_t(K_j) \subset [0, +\infty[\}$ recouvrent $[1, n]$; ils ne sont en général pas disjoints. Néanmoins, puisque $j \in J_- \cap J_+$ équivaut à $\inf K_j = \sup K_j$, nous pouvons poser de manière cohérente:

$$a_j{}^* = \begin{cases} \inf K_j, & j \in J_+ \\ \sup K_j, & j \in J_- \end{cases}; \qquad b_j{}^* = \begin{cases} \sup K_j, & j \in J_+ \\ \inf K_j, & j \in J_- \end{cases}.$$

Utilisant surtout (iv) et (ii), on voit aisément que $a^* = (a_1{}^*, \dots, a_n{}^*)$ et $b^* = (b_1{}^*, \dots, b_n{}^*)$ conviennent. (Il y a d'ailleurs unicité dans (v), mais nous ne nous servirons pas de cette remarque.)

## 5

PROPOSITION. *Tout compact $K$ de la droite réelle ayant $n$ composantes $K_1, \dots, K_n$, jouit de la propriété $(Q_n)$. Si de plus $K$ est discret, alors toute application de $K$ dans $\mathbb{R}$ est un polynome (relativement à tout système de Tchebycheff à $n$ fonctions sur $K$).*

La deuxième assertion, exercice trivial d'algèbre linéaire (ou, aussi bien, conséquence de [1, p. 36]), entraîne la première pour $K$ discret. D'autre part, le cas $n = 1$ est évident.

Soient donc $n \geqslant 2$, $K_n$ non réduite à un point, $\{g_1, ..., g_n\}$ un système de Tchebycheff sur $K$. Pour chaque $a_1 \in K$ et chaque $a = (a_2, ..., a_n) \in \prod_{j=2}^{n} K_j$, posons $G_a(a_1) = \det(g_j(a_k))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$. Par l'assertion (v) de la Proposition 4, appliquée aux restrictions des $g_j$ à $K \backslash K_1$, il existe un couple $(u^*, v^*)$ d'éléments de $\prod_{j=2}^{n} K_j$, tel que les polynomes $G_{u^*}$ et $-G_{v^*}$ soient tous deux $\geqslant 0$ sur $K \backslash K_1$. Il suffit de montrer que l'un d'eux est $> 0$ sur $K_1$. Or, c'est une conséquence immédiate du fait que l'application continue

$$\prod_{h=1}^{n} K_h \ni s = (s_1, ..., s_n) \mapsto \det(g_j(s_k)) \in \mathbb{R}$$

ne s'annule pas sur son espace de départ connexe.

## 6

PROPOSITION. *Tout compact de $\mathbb{T}$ ayant au plus $n$ composantes connexes possède la propriété $(Q_n)$.*

Dans le cas discret, ceci n'ajoute strictement rien à la Proposition 5. Une partie compacte du tore, non discrète, ayant $m$ composantes, est réunion d'une suite croissante de compacts ayant $m + 1$ composantes; la conclusion suit par récurrence décroissante sur $m$, grâce aux Propositions 3.1 et 5.

## 7

PROPOSITION. *Les propriétés $(P_n)$ et $(Q_n)$ sont équivalentes pour tout $n$. Plus précisément, un système de Tchebycheff ne peut admettre de polynome non identiquement nul, partout $\geqslant 0$, sans admettre un polynome partout $> 0$.*

Sur l'espace compact $K$ muni d'un système de Tchebycheff à $n$ fonctions, soit en effet donné un polynome non identiquement nul $f$, partout $\geqslant 0$. Choisissons une partie $L$ de $K$ à $n$ éléments, contenant les zéros de $f$. Par la deuxième assertion de la Proposition 5, appliquée au système induit sur le compact discret $L$, il existe un polynome $g$ tel que $U = g^{-1}(]0, +\infty[)$ soit un voisinage ouvert de $L$. Si $U = K$, plus rien n'est à prouver; sinon, notons $c$ (resp. $d$) le minimum de $f$ (resp. $g$) sur le compact $K \backslash U$. De par le choix de $L$, $c$ est $> 0$; pour $r > 0$ tel que $c + rd > 0$, le polynome $f + rg$ sera $> 0$ aussi bien sur $K \backslash U$ que sur $U$.

## 8

Proposition. *Nul espace compact ayant plus de $n$ composantes ne peut satisfaire à la propriété $(P_n)$ sans être dépourvu de système de Tchebycheff à $n$ fonctions.*

Il est facile de voir qu'un espace topologique $K$ possédant au moins $n+1$ composantes est réunion de $n+1$ ouverts non vides deux à deux disjoints $U_1,..., U_{n+1}$ ; choisissons un point $x_k$ dans chaque $U_k$. Supposons en outre $K$ compact, muni d'un système de Tchebycheff $\{g_1,..., g_n\}$. Soit $a = (a_1,..., a_{n+1})$ un vecteur non nul du noyau de l'application linéaire $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ représentée, dans les bases canoniques, par la matrice $A = (g_j(x_k))_{1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n+1}$. *Les $a_k$ sont tous différents de zéro,* car la nullité de l'un d'eux contredirait la régularité de la matrice carrée d'ordre $n$ obtenue par suppression de la colonne de $A$ d'indice correspondant. La fonction continue $g$ définie par $g(U_k) = \{a_k\}$ ne s'annule donc en aucun point de $K$, de sorte que les $h_j = g \cdot g_j$ forment un nouveau système de Tchebycheff sur $K$. Par ailleurs, la relation $f(a) = 0$ se traduit par le fait que l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par les lignes (indépendantes) de la matrice $(h_j(x_k))$ est orthogonal au vecteur dont toutes les coordonnées valent 1. Donc aucun polynome du nouveau système ne peut être $> 0$ en chaque $x_k$, et à plus forte raison la propriété $(P_n)$ est exclue.

## 9

Le Théorème 2.2 découle instantanément des Propositions 6 à 8, moyennant l'observation que tout compact non connexe du tore admet des systèmes de Tchebycheff de cardinal fini arbitraire (au plus égal au sien propre).

## Remerciements

L'auteur tient à remercier Monsieur le Professeur J.-P. Kahane de son aide et de ses généreux encouragements.

## Bibliographie

1. G. G. Lorentz, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
2. I. J. Schoenberg and C. T. Yang, On the unicity of solutions of problems of best approximation, *Ann. Mat. Pura Appl.* **54** (1961), 1–12.